

Magyar-német (TKA-DAAD) kutatócsere projekt Záró beszámoló

A projekt adatai:

| | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| Nyilvántartási szám: | 307818 |
| Projektcím: | Metrizáció a Finsler geometriában |
| Magyar projektvezető neve: | Dr. Muzsnay Zoltán |
| Magyar intézmény neve: | Debreceni Egyetem |
| Német projektvezető neve: | Vladimir S. Matveev |
| Német intézmény neve: | Friedrich-Schiller-Universität, Jena |
| Támogatási időszak: | 2019-2021 |

A. A projektidőszakban elvégzett munka összefoglalása (max. 2 oldal)

A „Metrizáció a Finsler-geometriában” című pályázatunk célja a pályastruktúrák Finsler-metrizációs problémájának vizsgálata volt. Vizsgálataink középpontjában a speciális görbületi tulajdonságú pályatereknek és metrikák, valamint a monokormatikus, vagy más néven általánosított Berwald-metrikák álltak. Annak ellenére, hogy a pályázat által támogatott időszak második felében a COVID-19 vírus által okozott járványhelyzet jelentősen megnehezítette a kapcsolattartást és az együttműködést, a pályázatunkban megjelölt valamennyi területen sikerült eredményeket elérnünk. A rendelkezésünkre álló lehetőségeket igyekeztünk messzemenően kiaknázni: azon periódusokban, amikor lehetett utazni, akkor személyes részvétellel vettünk részt közös konferenciákon és workshopokon, amikor pedig ez nem volt lehetséges, akkor online konzultációkat tartottunk.

Ami a tudományos eredményeket illeti, a pályázatunkban megjelölt valamennyi területen sikerült új tudományos eredményeket elérnünk. Ezeknek egy része már referált nemzetközi folyóiratokban meg is jelent, illetve a benyújtás utáni bírálati fázisban van, további kéziratok pedig a publikálás előtti előkészítő stádiumban vannak. A német és magyar résztvevők közös munkáját nagyban segítette, hogy a Vladimir Matveev által vezetett jénai geometriai kutatócsoport a pályázat kezdetén Debrecenben járt, és az itt tartózkodásuk alatt igen intenzív munkakapcsolatot sikerült kialakítanunk. Több előadás és szeminárium keretében a kutatócsoportok tagjai tájékozódhattak a legfrissebb tudományos eredményekről, az informális konzultációk során pedig kialakulhattak azok a szorosabb munkakapcsolatok, melyek a speciális területeken az együttműködést lehetővé tették. Egymás eredményeinek, technikájának és módszereinek a megismerése igen hasznosnak bizonyult. Az egyhetes intenzív kutatómunka eredményesen zárult, több új eredmény vázlata is megszületett.

A Finsler-metrizálható terek holonómiájának vizsgálatában jelentős eredményeket értünk el, melyek elméleti szempontból igen jelentősek. Korábbi vizsgálatokból már ismert volt, hogy a Finsler-metrizálható terek holonómia csoportja lehet véges, illetve végtelen dimenziós. A német kollégákkal közösen megvizsgáltuk, hogy melyik a generikus azaz a tipikus eset. A eredményeinket a német kutatócsoport vezetőjével közösen írt tudományos publikációban írtuk le, melyet a terület egy kiemelt (Q1-es szintű) *The Journal of Geometric Analysis* folyóiratában sikerült publikálnunk. (B. Hubicska, V.S. Matveev, Z. Muzsnay, Almost All Finsler Metrics have Infinite Dimensional Holonomy, *The Journal of Geometric Analysis*, volume 31, pages 6067–6079, 2021). Ez a cikk, illetve a benne foglalt eredmények további érdekes kérdéseket vetnek fel. Remélem, hogy lehetőségünk lesz a tudományos együttműködést tovább folytatni és a vizsgálataink során felmerült további kérdéseket megválaszolni.

A Finsler-geometria kvantum-információelméletbeli alkalmazásához kapcsolódva megvizsgáltuk, hogyan jelennek meg itt a holonómia transzformációk és ezek milyen új fizikai jelenséghez vezethetnek. A terület legfrissebb eredményeit alapul véve, a kvantum információelmélet Randers-modelljét használva rámutattunk, hogy egy spinnel rendelkező kétfázisú kvantumrendszer mágneses mezőben a klasszikus Riemann-modellhez képest egészen eltérő fizikai viselkedést illetve állapotokat mutathat.

Vizsgálatainkban kiemelt figyelmet kapnak a projektív metrizálhatósági vizsgálatok. Itt olyan metrikus struktúra létezését vizsgáljuk, melynek a geodetikusaival egy adott pályastruktúra geodetikusaival – átparaméterezés erejéig – megegyeznek. A metrika létezése egy parciális differenciáltegyenlet-rendszer megoldhatóságára vezethető vissza, mely erősen túldeterminált, így általában nem létezik megoldás. Elsőként sikerült olyan eredményeket kapnunk, ahol a struktúra görbületi tenzora nem izotróp. Az eredményt nemzetközi folyóiratban publikáltuk.

Vizsgálataink további kiemelt területe az általánosított Berwald-terek vizsgálata. A Finsler-metrikával kompatibilis lineáris konnexióinak meghatározására mindeddig csak bizonyos speciális esetekben volt iránymutató eljárás: ld. pl. a szemi-szimmetrikus lineáris konnexiók esetét, melyek torziója (az átlagolási módszer alkalmazásaként) kifejezhető a Finsler-metrikából származó belső geometriai mennyiségek segítségével. Az átlagolási eljárás során fellépő integrálformulák azonban komoly technikai nehézséget jelentenek. A kutatómunka itt a keresési eljárás egyszerűsítését célozta részben speciális Finsler-metrikákkal rendelkező terek esetében (ld. Randers-terek), részben alacsony dimenziós esetben (ld. háromdimenziós terek), részben pedig új módszereket keresve (ld. extrémális kompatibilis lineáris konnexiók). A 3-dimenziós általánosított Berwald-terek esetében sikerült explicit eredményt elérni a totálisan antiszimmetrikus torziótenzorral rendelkező kompatibilis lineáris konnexiók esetében, illetve általános eljárást is kidolgoztunk a kompatibilis lineáris konnexió meghatározására. Az általánosított Berwald-terek elméletében elért legfontosabb eredmény a kompatibilis lineáris konnexió létezésének eldöntése, illetve explicit előállítása belső geometriai adatokra támaszkodó eljárással. A futamidő alatt kifejlesztett módszerünk az extrémális kompatibilis lineáris konnexió fogalmára épül, mely a torziótenzor normáját pontonként minimalizálja. Az így adódó feltételes szélsőértékproblémára egy algoritmikus megoldást sikerült találni, Randers-metrikák esetén pedig explicit módon sikerült meghatározni az extrémális kompatibilis lineáris konnexiót.

B. A közös projekt eredményei (max. 2 oldal)

Konkréten az alábbi témákban sikerült eredményeket elérnünk:

- Hubicska B., Matveev, V., Muzsnay Z.: *Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group*, *The Journal of Geometric Analysis* volume 31, 6067–6079 (2021)

A cikket a projekt szempontjából különösen fontosnak tartom, mert a német és magyar résztvevők igen effektív közös munkájának az eredménye ez a közös publikáció (a társszerzőnk V. Matveev, a német kutatócsoport vezetője). A cikkben azt vizsgáljuk, hogy a párhuzamos eltolás által származtatott úgynevezett holonómia csoport generikus esetben vajon véges vagy végtelen dimenziós-e. A magyar résztvevőknek a Funk-metrika holonómia-csoportjára vonatkozó korábbi eredményeit, valamint a német projektvezető Riemann-geometriában használt technikáját felhasználva sikerült megmutatnunk, hogy minden Finsler-metrika infinitezimálisan deformálható egy olyan metrikává, melynek holonómia-csoportja végtelen dimenziós. Így megmutattuk, hogy a generikus esetben egy Finsler-tér holonómia-csoportja végtelen dimenziós. Ezen eredményekről a „*Differential Geometry and its Applications*” című konferencián (2020, Hradec Kralove, Csehország), a „*Workshop Connections, Symmetries and Finsler Geometry*” (Jena, 2020), illetve a „*The 55th Symposium on Finsler Geometry*” (Online konferencia, Sapporo, Japan) konferenciákon a cikk egyik szerzője meghívott előadóként tudományos előadást tartott.

- Hubicska B., Muzsnay Z.: *Holonomy in the quantum navigation problem*, *Quantum Information Processing*, DOI: 10.1007/s11128-019-2438-8, (2019) 18:325

A cikkben olyan jelenséget vizsgálunk, mely a Finsler terek holonómiájának témakörében mind elméleti, mind gyakorlati szempontból érdekes lehet. A kvantum-információelmélet friss eredményeit felhasználva az 1/2-spinű kétfázisú kvantumrendszer viselkedését vizsgáltuk mágneses mezőben a Randers-modell segítségével. A holonómia-struktúra felhasználásával rámutattunk, hogy a kapott fizikai rendszer a klasszikus Riemann-modellhez képest új jelenséget mutat: a lehetséges állapotok száma az 1-dimenziós forgáscsoport helyett a kör diffeomorfizmus-csoportjának egy végtelen dimenziós részcsoportjával írható le.

- Muzsnay Z. Milkovszki T: *About the projective Finsler metrizable: First steps in the non-isotropic case*, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Volume 24 (2019), No. 2 pages: 25-41:

A cikkben olyan metrikus struktúra létezését vizsgáljuk, melynek a geodetikusi egy adott pályastruktúra geodetikusaival – átparaméterezés erejéig – megegyeznek. A metrika létezése egy parciális differenciáltegyenlet-rendszer megoldhatóságára vezethető vissza, mely erősen túldeterminált, így általában nem létezik megoldás. Elsőként sikerült olyan eredményeket kapnunk, ahol a struktúra görbületi tenzora nem izotróp. A cikkben a német projektvezető Vladimir Matveev eredményeit felhasználjuk, és ezekre hivatkozunk.

- Cs. Vincze, *On compatible linear connections with totally anti-symmetric torsion tensor of three - dimensional generalized Berwald manifolds*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, volume 61, pages 117–128 (2020)

A dolgozatban szerepel a kompatibilis lineáris konnexió torziójának kifejezése az átlagolási eljárás segítségével, másrészt pedig levonjuk a differenciáltopológiai következményeket.

- Cs. Vincze, M. Oláh, L. Muhsin, *On the divergence representation of the Gauss curvature of Riemannian surfaces and its applications* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 08 November 2018):

Ha az általánosított Berwald-tér Finsler metrikával kompatibilis lineáris konnexiója szemi-szimmetrikus, akkor az átlagolási eljárás lehetővé teszi a torzió - s ezáltal a lineáris konnexió - kifejezését a Finsler metrikából származó belső geometriai mennyiségek segítségével. Az átlagolási eljárás során fellépő integrálformulák azonban komoly technikai nehézséget jelentenek már az alacsony dimenziós esetekben is. A pályázat célkitűzéseihez csatlakozó dolgozatban sikerült a keresési eljárást jelentősen egyszerűsíteni a csatolt Riemann metrika görbületének divergencia-reprezentációja segítségével. Differenciáltopológiai megszorítások (Euler karakterisztika) adódtak és kiderült, hogy a konstans görbületű Riemann felületek közül csak a hiperbolikus sík esetén lehetséges olyan Riemann-féle értelemben metrikus lineáris konnexiót találni, mely Finsler-féle értelemben átmétrizálható, azaz kompatibilis egy, az alapsokaságon adott Finsler metrikával is. Az eredményeket összefoglaló előadást tartott Cs. Vincze „On generalized Berwald surfaces” címmel a Scientific meeting Honoring Lajos Tamássy on the occasion of his 95th birthday, 2018, University of Debrecen, Debrecen, Hungary konferencián.

C. Az együttműködés további szempontjai: (max. 3 oldal)

1. Mennyiben alapulnak a projekt elért eredményei a német-magyar együttműködésen?

A projekt szempontjából kiemelt jelentőségűnek tartom a Hubicska B., Matveev, V., Muzsnay Z.: *Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group*, *The Journal of Geometric Analysis* volume 31, 6067–6079 (2021) cikk eredményeit, hiszen kiválóan demonstrálja az együttműködés hasznosságát és színvonalát. A Vladimir Matveev által vezetett jénai geometriai kutatócsoport első Debreceni látogatásakor igen intenzív munkakapcsolat alakult ki a német és a magyar résztvevők között. Több előadás és szeminárium keretében a kutatócsoportok tagjai tájékozódhattak a legfrissebb tudományos eredményekről, az informális konzultációk során pedig kialakulhattak azok a szorosabb munkakapcsolatok, melyek a speciális területeken az együttműködést lehetővé tették. Egymás eredményeinek, technikájának és módszereinek a megismerése igen hasznosnak bizonyult. A magyar kutatók több előadást is tartottak a Finsler-terek holonómia struktúrájáról, míg V. Matveev a Riemann-sokaságok elméletében alkalmazott technikát ismertette, mely alapján a generikus esetben a holonómia vizsgálható. Ezek ismeretek kombinálása, illetve ezeken alapuló további eredmények tették lehetővé, hogy a cikkben leírt tudományos eredmény megszülessen. Az eredmények jelentős nemzetközi visszhangot váltottak ki: vezető nemzetközi folyóiratban sikerült publikálni, illetve több nemzetközi konferencián meghívott előadóként tartottunk az eredményekből előadást (Csehország, Németország, Japán).

A kompatibilis lineáris konnexió létezésének eldöntése, illetve explicit előállítás a belső geometriai adatokra támaszkodó eljárással (azaz az extrémális kompatibilis lineáris konnexióra támaszkodó módszerünk) a projektben közreműködő V. Matveev és N. Bartelmess egy közös, a monochromatikus Finsler-terekkel kapcsolatos eredményét is felhasználja. Ezzel szinkronban a német partnerek által a projekt keretén belül elkészített Nina Bartelmess és Julius Lang, „On Finsler surfaces that are both Douglas and generalized Berwald” (Publ. Math. Debrecen 2020, Vol. 97. dolgozat, továbbá Juliul Lang „Three Projective Problems on Finsler Surfaces” című doktori disszertációja hivatkozásokat tartalmaz több olyan cikkre, mely a magyar résztvevők eredményeit tartalmazzák. Ezek a hivatkozások a magyar fél témába vágó eredményeinek alapos ismeretét tükrözik.

2. Hogyan befolyásolta a támogatás a projekt előmenetelét?

A projekt keretében és támogatásával szakmai találkozót szerveztünk, ahol mind a magyar, mind pedig a német résztvevők ismertették a már korábban elért eredményeiket, közös célokat fogalmaztunk meg és egyeztetettük a megoldásra vonatkozó elképzeléseket. Több tudományos előadás is megvalósult a pályázati támogatás segítségével. Közös konferenciákat szerveztünk Debrecenben, illetve Jénába. A teljesség igénye nélkül

néhány

előadás:

- Saberali, S. (University of Jena): *Conformally related Douglas metrics*, Debrecen-Jena Geometry meeting;
- Muzsnay Z. (University of Jena): *Sprays metrizable by Finsler functions of constant flag curvature* Debrecen-Jena Geometry meeting;
- Vincze Cs. (Debreceni Egyetem): *On generalized Berwald surfaces: methods and examples*, Debrecen-Jena Geometry meeting;
- Muzsnay Z. (Debreceni Egyetem): *Some results on the Finsler metrizability*, New Methods in Differential Geometry
- Schumm J. (University of Jena) *C-projective equivalence, quantum integrability of the geodesic flow and separation of variables for Schrödinger's equation*
- Muzsnay Z. (Debreceni Egyetem): *Tangent algebra of a diffeomorphism group and its application in the holonomy theory*, 8th Thuringian Geometry Day
- Muzsnay Z. (Debreceni Egyetem): *The inverse problem of the calculus of variations and the problem of metrizability*, Connections, Symmetries and Finsler Geometry

Az előadásokon túl informális konzultációk segítették a közös munkát. Ezen túlmenően a projekt lehetőséget biztosított az eredmények bemutatásra nemzetköz konferencián és hazai fórumon is: The 55th Symposium on Finsler Geometry (Sapporo, Japán, online konferencia), Kerékhajtó Szeminárium (Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem), Thuringian Geometry Day (Jéna, Németország), *Differential Geometry and its Applications* (Hradec Kralove, Csehország), Szegedi Geometria Nap (Szegedi Tudományegyetem).

3. Hogyan csatlakozott a második évi munka az első év eredményeihez?

Az általánosított Berwald-terek elméletében a Riemann- és a Finsler-geometria egymásra épül. A kettő közötti kapcsolatot egy mindkét struktúrával kompatibilis lineáris konnexió jelenti, s mindaz, ami egy konnexió jelenlétével összefügg: pályastruktúra, párhuzamos eltolás stb. Az első támogatási szakaszban a legjelentősebb eredményeket két-, illetve háromdimenziós esetben sikerült elérni, melyek legszebb része azoknak a differenciáltopológiai, illetve görbületi tulajdonságoknak a felfedése, amiket az említett – meglehetősen összetett – geometriai struktúra kényszerít az alapsokaságra (az Euler karakterisztika eltűnése, konstans görbület stb.) A második szakaszban a háromdimenziós terek esetében már nem csak a totálisan antiszimmetrikus kompatibilis lineáris konnexiót sikerült leírni, hanem általános módszert dolgoztunk ki a kompatibilis lineáris konnexiók létezésének eldöntésére. Az extrémális kompatibilis lineáris konnexióra épülő módszerünk pedig megoldotta a problémát magasabb dimenziós terek esetében is.

4. Milyen szempontból volt jelentős a projekt a fiatal kutatók tapasztalatszerzése, szakmai fejlődése szempontjából?

Az elért tudományos eredményeken kívül a projekt legnagyobb jelentősége a fiatal kutatók bevezetése a nemzetközi tudományos kutatócsoportok működésébe. Tapasztalt, szakmailag elismert kutatók segítségével nemcsak bepillantást nyerhettek a kutatásszervezés, problémafelvetés legfontosabb kreatív és technikai módszereibe, hanem aktívan bekapcsolódhattak jelentős geometriai témák fejlődésébe is. A nemzetközi kutatói környezet további előnyeit is megtapasztalhatták: tudományos és szociális kapcsolatokat alakíthattak ki leendő kollégáikkal, valamint idegen nyelvi gyakorlatot szerezhettek mind hétköznapi, mind szaknyelvi téren. A kutatások egy-egy senior kutató vezetésével csoportbontásban folytak, ami lehetőséget adott a közvetlen munkakapcsolat kialakítására.

5. Sorolja fel azokat a hazai vagy külföldi tudományos közleményeket és publikációkat, amelyek az együttműködés eredményeként jelentek meg!

- a) Hubicska B., Matveev, V., Muzsnay Z.: Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group, *The Journal of Geometric Analysis* volume 31, 6067–6079 (2021)
- b) Hubicska B., Muzsnay Z.: Holonomy in the quantum navigation problem, *Quantum Information Processing*, DOI: 10.1007/s11128-019-2438-8, (2019) 18:325
- c) Muzsnay Z. Milkovszki T: About the projective Finsler metrizable: First steps in the non-isotropic case, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Volume 24 (2019), No. 2 pages: 25-41:
- d) Cs. Vincze, M. Oláh: On generalized Berwald manifolds of dimension three, accepted for publication in *Publ. Math. Debrecen*.
- e) Cs. Vincze, M. Oláh: On the extremal compatible linear connection of a Randers space, *J. of Geom.* 111 (19) (2020),
- f) Cs. Vincze: On the extremal compatible linear connection of a generalized Berwald manifold, accepted for publication in *Aequat. Math.*

- g) Cs. Vincze: On compatible linear connections with totally anti-symmetric torsion tensor of three-dimensional generalized Berwald manifolds, Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 61 (1) (2020), pp. 117-128.

6. Milyen akadályokat vagy problémákat érzékelt a projekt végrehajtása során?

A pályázat által támogatott időszak második felében a COVID-19 vírus által okozott járványhelyzet jelentősen megnehezítette a tudományos együttműködést. A járványhelyzet súlyosbodása miatt bevezetett utazási korlátozások, illetve későbbi zárlat nemcsak a nemzetközi, de még az azonos országban, illetve azonos egyetemeken dolgozó kollégák kapcsolattartását és együttműködése is rendkívüli módon megnehezítette. A kivételes helyzet ellenére sikerült tovább dolgoznunk és új tudományos eredményeket elérnünk. A rendelkezésünkre álló lehetőségeket igyekeztünk messzemenően kiaknázni: azon periódusokban, amikor lehetett utazni, akkor személyes részvétellel vettünk részt közös konferenciákon és workshopokon, amikor pedig ez nem volt lehetséges, akkor online konzultációkat tartottunk. Sokat segített ebben a pályázat támogatási időszakának meghosszabbítása is.

7. Mi a legjelentősebb szakmai eredmény, amit kiemelne a projektegységműködés kapcsán?

A projekt szempontjából a legjelentősebb eredményének a Hubicska B., Matveev, V., Muzsnay Z.: *Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group*, (The Journal of Geometric Analysis volume 31, 6067–6079, 2021) cikk eredményeit tartom: egy nemzetközileg aktívan kutatott területen sikerült olyan új eredményeket elérni, amelyek alapvetően járulnak hozzá a téma mélyebb megértéséhez. A cikkben leírt tudományos eredmények igen pozitív nemzetközi érdeklődést váltottak ki: egy vezető nemzetközi (Q1-es) folyóiratban sikerült ezeket publikálni, illetve több nemzetközi konferencián meghívott előadóként tartottunk ezekből az eredményekből előadást (Csehország, Németország, Japán).

8. Van-e olyan javaslat, amivel módosítaná a pályázati felhívás és végrehajtás szempontjait a jövőre nézve?

A pályázat célja, kezelése, rugalmassága megfelelő volt. Különösen fontos volt ez a Covid-19 vírushelyzet miatt kialakult rendkívüli helyzet miatt. Az egyetlen pont, ahol javítani lehetne, illetve kellene a pályázat lebonyolításán az az, hogy a pályázati periódus elején viszonylag hosszabb időszak kellett ahhoz, hogy a német partnerek ténylegesen megkapják a támogatás összegét, ami némi kellemetlenséget, illetve szervezési nehézségeket okozott a pályázat első időszakában. Viszont amennyire tudom ez nem a pályázatot kezelő apparátuson, hanem egyéb, rajtuk kívül álló tényezőkön múlt. Összességében igen pozitívan értékelem a pályázattal kapcsolatos tapasztalataimat.

Kelt: Debrecen, 2021. december 4-én.


Aláírás